

ESTUDIO DE LA LEY DE STOKES

R. Cárdenas, G. Chaparro[♦], y F. Fajardo.

Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá D.C. 2003

RESUMEN

En este trabajo se estudia la dependencia de la velocidad terminal con respecto a la densidad de un cuerpo esférico que se mueve dentro de un recipiente con aceite. Para variar la densidad manteniendo el volumen constante se modifica la masa de un Ping-Pong llenándolo con diferentes cantidades de agua. Dependiendo de la relación de densidades el cuerpo cae o sube dentro del fluido, lo que permite obtener movimiento tanto ascendente como descendente. El inicio del movimiento ascendente del Ping-Pong se controla por medio de un electroimán, que lo asegura momentáneamente en el fondo del recipiente. A partir de los datos de posición en función del tiempo se encuentra la relación entre la velocidad terminal y la densidad del cuerpo sumergido. Para velocidades superiores a 0.7 m/s es necesario corregir el término de la fuerza resistiva, que se toma usualmente lineal con la velocidad terminal. Este experimento difiere del estudio usual de la ley de Stokes mediante la maquina de Atwood ya que el Ping-Pong no esta sujeto por ningún hilo.

INTRODUCCIÓN

La ley de Stokes relaciona la velocidad terminal de un cuerpo esférico sumergido en un fluido y en presencia de un campo gravitatorio, con su masa y su radio, y con la densidad y la viscosidad del fluido en el cual la masa esta sumergida. Un cuerpo alcanza la velocidad terminal cuando no puede aumentar su velocidad al anularse la fuerza gravitatoria con la fuerza resistiva del medio; así queda en un estado de movimiento uniforme.

Una masa esférica de radio a y densidad \mathbf{s}_m sumergida en un fluido con densidad \mathbf{s} y viscosidad \mathbf{h} , esta sujeta a ciertas fuerzas, como el empuje, el peso y la fuerza viscosa retardante. Entonces, la fuerza neta en la dirección de movimiento es:

$$\sum_{F_z} F = F_{empuje} - F_{retardante} - F_{peso} = M \frac{d^2z}{dt^2} \quad (1)$$

M es la masa inercial, F_{empuje} es igual al peso del líquido desalojado, F_{peso} es igual al peso de la esfera y $F_{retardante} = 6\pi\mathbf{h}av$. Al expresar la ecuación (1) en función de la velocidad v , obtenemos la ecuación de movimiento:

$$\frac{dv}{dt} + 9 \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{s}a^2} v + 2g \left(\frac{\mathbf{s}_m}{\mathbf{s}} - 1 \right) = 0 \quad (2)$$

En el régimen de velocidad terminal la velocidad es constante, por lo cual se obtiene de (2):

[♦] email: germanc@estudiantes.fisica.unal.edu.co

$$v_T = \frac{2}{9} \frac{ga^2}{h} (s_m - s) = \frac{2}{9} \frac{ga^2}{h} s - \frac{mg}{6pha} \quad (3)$$

Esta expresión es conocida como la ley de Stokes, y predice que la gráfica de la velocidad terminal en función de la masa es una línea recta con punto de corte b y pendiente m dados por (1):

$$b = \frac{2}{9} \frac{ga^2}{h} s; \quad m = -\frac{g}{6pha} \quad (4)$$

De (3) se puede ver que el signo de la velocidad está dado por la diferencia de densidades, es decir, si la densidad de la masa es menor que la del fluido, la masa asciende, y viceversa.

Si se halla la velocidad terminal de un cuerpo esférico moviéndose en un líquido variando la masa pero manteniendo constante el volumen, a partir de los datos se puede encontrar la relación entre la velocidad terminal y la densidad del cuerpo sumergido en el fluido; la relación obtenida experimentalmente se puede comparar con la solución encontrada teóricamente (3) para la dependencia de la fuerza retardante en primer orden con la velocidad.

EXPERIMENTO

El montaje experimental se observa en la Figura 1, el cual consiste de un tubo de vidrio de longitud 1.2 m y diámetro 0.08 m. Para variar la densidad manteniendo el volumen constante, se utilizó una masa esférica rígida hueca, en este caso un Ping-Pong de radio $a=0.015(1)$ m. Inicialmente el Ping-Pong esta lleno de agua, y en cada toma de datos se extrajo cierta cantidad de esta para variar la velocidad terminal. Dependiendo de la relación de densidades, la masa cae o sube dentro del fluido. Por esta razón, para cierta cantidad de agua dentro del Ping-Pong éste deja de caer, de modo que para medir las velocidades terminales en ese rango era necesario soltarlo desde el fondo del tubo. Para hacer esto sin perturbar el fluido, se le colocó un tornillo metálico y se puso externamente un electroimán en el extremo inferior del tubo, de manera que el Ping-Pong se podía mantener en el fondo del tubo hasta estar listos para la toma de datos. Este montaje

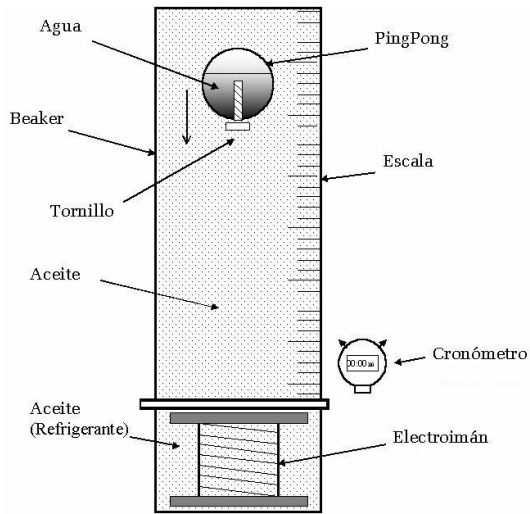


Figura 1. Montaje experimental para el estudio de la ley de Stokes en función de la densidad de la masa que cae dentro del fluido.

experimental difiere del estudio usual de la ley de Stokes mediante la maquina de Atwood ya que el Ping-Pong no esta sujeto por ningún hilo [1,2].

Para determinar la velocidad terminal se midió la posición del Ping-Pong en función del tiempo, a intervalos de 10cm a medida que ascendía o descendía por el fluido.

RESULTADOS

Para incrementos de 0.5 g en la masa del Ping-Pong se tomaron 3 series de 10 datos de tiempo como función de la distancia recorrida. La Figura 2 muestra los datos de posición como función del tiempo para el Ping-Pong, donde se observa que la velocidad terminal no cambia linealmente con la densidad, ya que las variaciones en la magnitud de la pendiente no ocurren a una rata constante. Lo anterior no es de esperarse ya que las variaciones de masa se hicieron de manera uniforme $\Delta m=0.5$ g.

Graficando los valores de las pendientes obtenidas de la Figura 2 como función de la densidad, se nota que la velocidad terminal no varía de manera lineal con respecto a la densidad como era de esperarse (ver Figura 3), sino que después de que la esfera alcanza un cierto valor de velocidad (0.7m/s), la cantidad de masa que se requiere para lograr un cambio en la velocidad terminal es mayor.

Esta no linealidad se puede deber a que la ley de Stokes es valida cuando el numero de Reynolds es menor que uno [1]; y como en nuestro caso el diámetro del Ping-Pong es similar al diámetro del tubo, cuando la velocidad se incrementa aparecen turbulencias que alteran el movimiento del Ping-Pong y producen la no linealidad de la fuerza retardante con la velocidad terminal.

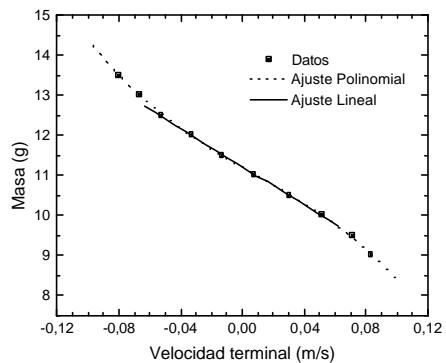
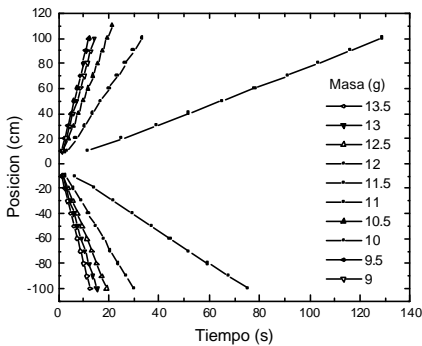


Figura 2. Datos experimentales de posición como función del tiempo de un Ping-Pong de densidad variable que se mueve dentro de un tubo lleno de aceite.

Figura 3. Masa del Ping-Pong como función de la velocidad terminal. El ajuste lineal corresponde a lo predicho por la ley de Stokes. La curva en trazos corresponde al modelo no lineal propuesto en la ecuación (5).

Para ajustar los datos de la Figura 3 se propone tomar una aproximación hasta orden 3 en la velocidad, de esta manera podemos obtener la masa en función de la velocidad terminal de la forma:

$$m = \frac{4pa^3}{3} \mathbf{s} - \frac{6pha}{g} v_T + Av_T^2 + Bv_T^3 \quad (5)$$

En donde A y B son constantes. Al ajustar los datos experimentales a la ecuación anterior se obtiene como resultado:

$$m = [0.01119(2) - 0.0221(7)v_T + 0.020(5)v_T^2 - 0.79(2)v_T^3] \text{kg} \quad (6)$$

La cual corresponde a la curva de trazos que se observa en la Figura 3. De (5) y (6) se encuentra la densidad del fluido, la viscosidad y los coeficientes A y B :

h	s	A	B
0.76(2) kg/m·s	773(1) kg/m ³	0.029(5) kg·s ³ /m ³	-0.796(15) kg·s ² /m ²

Para el agua, $h=0.001$ kg/m·s y $s=1000$ kg/m³; así, se observa que el aceite dieléctrico es 23% menos denso que el agua, y es 750 veces mas viscoso.

Del ajuste lineal de los datos de la Figura 3, según lo predicho por la ley de Stokes se encuentra que:

$$m=[0.0112(1)-0.0238(3)v_T] \text{kg}$$

Donde se ve que los coeficientes son similares a los dos primeros términos que se obtienen para el ajuste no lineal determinado por la expresión (6).

CONCLUSIONES

Para describir adecuadamente el comportamiento de la velocidad terminal como función de la masa de un Ping-Pong de densidad variable que se mueve en un tubo lleno de aceite, se hace necesario considerar términos de orden superior a uno en la dependencia de la fuerza retardante con respecto a la velocidad

El modelo de la ley de Stokes es aplicable en un rango de velocidades terminales pequeñas (inferiores a 0.7m/s), en el cual ordenes de magnitud de velocidad al cuadrado son despreciables.

REFERENCIAS

- [1] Stautberg, M. Fazio, F. Russoto, M. y Wilkocz, A., Am. J. of Phys., 54, 904 (1986).
- [2] http://www.fisicarecreativa.com/informes/infor_termo/ley_stokes.pdf (2003).